FONCTIONS AFFINES ET ECART RELATIF

Outils mathématiques

Exercice 1 : Isoler un membre

1. A partir de la formule $p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B$:
   a. Isolez p_A. $p_A = p_B + \rho g z_B - \rho g z_A$
   b. Isolez z_A. $\rho g z_A = p_B + \rho g z_B - p_A$

$$\Rightarrow z_A = \frac{p_B + \rho g z_B - p_A}{\rho g} \text{ ou } z_A = \frac{p_B - p_A}{\rho g} + z_B$$

   c. Isolez z_B. $p_A + \rho g z_A - p_B = \rho g z_B$

$$\Rightarrow z_B = \frac{p_A + \rho g z_A - p_B}{\rho g} \text{ ou } z_B = \frac{p_A - p_B}{\rho g} + z_A$$

   d. Isolez g. $p_A = p_B + \rho g z_B - \rho g z_A$

$$\Rightarrow p_A - p_B = \rho g.(z_B - z_A)$$

$$\Rightarrow g = \frac{p_A - p_B}{\rho.(z_B - z_A)}$$

2. A partir de la formule $\frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B$:
   a. Isolez v_A. $\frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_A^2 = \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B - gz_A$$

$$\Rightarrow v_A^2 = v_B^2 + 2gz_B - 2gz_A$$

$$\Rightarrow v_A = \sqrt{v_B^2 + 2gz_B - 2gz_A} \text{ ou } v_A = \sqrt{v_B^2 + 2g.(z_B - z_A)}$$

   a. Isolez z_A. $\frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B$

$$\Rightarrow gz_A = \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B - \frac{1}{2}v_A^2$$

$$\Rightarrow z_A = \frac{v_B^2}{2g} + z_B - \frac{v_A^2}{2g} \text{ ou } z_A = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g} + z_B$$

   a. Isolez v_B. $\frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A - gz_B = \frac{1}{2}v_B^2$$

$$\Rightarrow v_B^2 = v_A^2 + 2gz_A - 2gz_B$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gz_A - 2gz_B} \text{ ou } v_B = \sqrt{v_A^2 + 2g.(z_A - z_B)}$$

   a. Isolez z_B. $\frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B$

$$\Rightarrow . \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A - \frac{1}{2}v_B^2 = gz_B$$

$$\Rightarrow z_B = \frac{v_A^2}{2g} + z_A - \frac{v_B^2}{2g} \text{ ou } z_B = \frac{v_A^2 - v_B^2}{2g} + z_A$$

Exercice 2 : Proportions stœchiométriques

1. A partir du tableau d'avancement ci-dessous :

Equation de la réaction :		$2Ag^+_{(aq)}$ +	$Fe_{(s)}$ →	$2Ag_{(s)}$ +	$Fe^{2+}_{(aq)}$
Etat du système	Avancement de la réaction	Quantités de matière présentes dans le système			
Initial	x = 0	$n_i(Ag^+) = 0{,}080$	$n_i(Fe)$	$n_i(Ag) = 0$	$n_i(Fe^{2+}) = 0$
En cours	x	$n(Ag^+) = 0{,}080 - 2x$	$n(Fe) = n_i(Fe) - x$	$n(Ag) = 2x$	$n(Fe^{2+}) = x$
Final	x_{max}	$n_f(Ag^+) = 0{,}080 - 2x_{max}$	$n_f(Fe) = n_i(Fe) - x_{max}$	$n_f(Ag) = 2x_{max}$	$n_f(Fe^{2+}) = x_{max}$

   a. Isolez x_{max} dans les équations suivantes :
      i. $n_f(Ag^+) = 0{,}080 - 2x_{max}$

$$x_{max} = \frac{n_f(Ag^+) - 0{,}080}{-2} \text{ ou } x_{max} = \frac{0{,}080 - n_f(Ag^+)}{2}$$

      ii. $n_f(Fe) = n_i(Fe) - x_{max}$

$$x_{max} = \frac{n_f(Fe) - n_i(Fe)}{-1} \text{ ou } x_{max} = n_i(Fe) - n_f(Fe)$$

   b. En considérant que les réactifs ont été introduits dans des proportions stœchiométriques, que pouvez-vous conclure sur leur quantité de matière $n_f(Ag^+)$ et $n_f(Fe)$ en fin de réaction ?

On peut donc en conclure que $n_f(Ag^+) = 0$ mol et $n_f(Fe) = 0$ mol.

   c. Que deviennent alors les deux expressions de x_{max} de la question 1.a ?

Les deux expressions deviennent alors : $x_{max} = \frac{0{,}080}{2}$ et $x_{max} = n_i(Fe)$

d. Quelle est alors la quantité de matière de fer $Fe_{(s)}$ introduit initialement ?

$$x_{max} = 0{,}040 \text{ mol } \; et \; x_{max} = n_i(Fe) \Rightarrow n_i(Fe) = 0{,}040 \text{ mol}$$

La quantité de matière de fer introduit initialement est donc de 0,040 mol.

e. Lors d'un TP, vous avez pu recueillir une quantité de matière d'argent $Ag_{(s)}$ de 0,070 mol. Calculez l'écart relatif puis concluez.

La quantité de matière d'argent recueilli en fin de réaction devrait être selon le tableau d'avancement :

$$n_f(Ag^+) = 2x_{max} \Rightarrow n_f(Ag^+) = 0{,}080 \text{ mol}$$

Le calcul d'écart relatif est donc de :

$$\boldsymbol{\varepsilon = \left|\frac{n_{exp} - n_{réf}}{n_{réf}}\right|}$$

$$\textbf{AN : } \boldsymbol{\varepsilon = \left|\frac{0,070 - 0,080}{0,080}\right|}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon = 0,13 \text{ ou } 13\%}$$

Cet écart relatif étant assez élevé, il y a dû y avoir des erreurs de manipulation ou du matériel défaillant lors du TP.

2. Tracez les deux courbes représentant les équations suivantes :

   i. n = 0,080 - 2x ii. n = 0,040 – x

   Voir graphique de la dernière page.

3. Que représentent ces deux courbes ?

   Ces deux courbes représentent la quantité de matière des réactifs (Ag^+ et Fe) en fonction de l'avancement de la réaction. On voit que ces deux réactifs disparaissent mais que l'ion argent est consommé plus rapidement que le fer car son coefficient stœchiométrique est de 2 (correspond à un coefficient directeur de -2) tandis que celui du fer est seulement de 1 (correspond à un coefficient directeur de -1).

4. Comment pouvez-vous déterminer graphiquement l'avancement maximal ?

   L'avancement maximal peut être déterminé lorsque les quantités de matière des réactifs atteignent 0, donc lorsque les droites coupent l'axe des abscisses.

Exercice 3 : Réactif limitant ou en excès

1. A partir du tableau d'avancement ci-dessous :

   a. Isolez x_{max} dans les équations suivantes :

   i. $n_f(Mg) = 1{,}6.10^{-3} - x_{max}$ ii. $n_f(H_3O^+) = 5{,}0.10^{-2} - 2x_{max}$

$$x_{max} = \frac{n_f(Mg) - 1{,}6.10^{-3}}{-1} \text{ ou } x_{max} = 1{,}6.10^{-3} - n_f(Mg)$$

$$x_{max} = \frac{n_f(H_3O^+) - 5{,}0.10^{-2}}{-2} \text{ ou } x_{max} = \frac{5{,}0.10^{-2} - n_f(H_3O^+)}{2}$$

   b. Lequel des deux est le réactif limitant ?

   Pour répondre à cette question, nous devons faire les deux hypothèses.

   Hypothèse 1 : le magnésium Mg est le réactif limitant :

$$n_f(Mg) = 0 \Rightarrow x_{max,1} = 1{,}6.10^{-3} \text{ mol}$$

   Hypothèse 2 : l'ion oxonium H_3O^+ est le réactif limitant :

$$n_f(H_3O^+) = 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{5{,}0.10^{-2}}{2} \Rightarrow x_{max,2} = 2{,}5.10^{-2} \text{ mol}$$

   $1{,}6.10^{-3} \text{ mol} < 2{,}5.10^{-2} \text{ mol}$: **le magnésium est donc le réactif limitant et** $\boldsymbol{x_{max} = 1,6.10^{-3} \text{ mol}}$.

c. Lors d'un TP, vous avez pu recueillir une quantité de matière de dihydrogène $H_{2(s)}$ de $1{,}3.10^{-3}$ mol. Calculez l'écart relatif puis concluez.

La quantité de matière de dihydrogène recueilli en fin de réaction devrait être selon le tableau d'avancement :

$$n_f(H_2) = 2x_{max} \Rightarrow n_f(H_2) = 1{,}6.\,10^{-3}\ \text{mol}$$

Le calcul d'écart relatif est donc de :

$$\boldsymbol{\varepsilon = \left|\frac{n_{exp} - n_{réf}}{n_{réf}}\right|}$$

$$\textbf{AN : } \boldsymbol{\varepsilon} = \left|\frac{1{,}3.\,10^{-3} - 1{,}6.\,10^{-3}}{1{,}6.\,10^{-3}}\right|$$

$$\boldsymbol{\varepsilon = 0{,}19 \text{ ou } 19\%}$$

Cet écart relatif étant assez élevé, il y a dû y avoir des erreurs de manipulation ou du matériel défaillant lors du TP.

Equation de la réaction :		$Mg_{(s)} + 2H_3O^+_{(aq)} \rightarrow Mg^{2+}_{(aq)} + H_{2(g)} + 2H_2O_{(l)}$				
Etat du système	Avancement de la réaction	Quantités de matière présentes dans le système				
Initial	x = 0	$n_i(Mg) = 1{,}6.10^{-3}$	$n_i(H_3O^+) = 5{,}0.10^{-2}$	$n_i(Mg^{2+}) = 0$	$n_i(H_2) = 0$	solvant
En cours	x	$n(Mg) = 1{,}6.10^{-3} - x$	$n(H_3O^+) = 5{,}0.10^{-2} - 2x$	$n(Mg^{2+}) = x$	$n(H_2) = x$	solvant
Final	x_{max}	$n_f(Mg) = 1{,}6.10^{-3} - x_{max}$	$n_f(H_3O^+) = 5{,}0.10^{-2} - 2x_{max}$	$n_f(Mg^{2+}) = x_{max}$	$n_f(H_2) = x_{max}$	solvant

2. Tracez les deux courbes représentant les équations suivantes :

   i. $n = 1{,}6.10^{-3} - x$ ii. $n = 5{,}0.10^{-2} – 2x$

   Voir graphique de la dernière page.

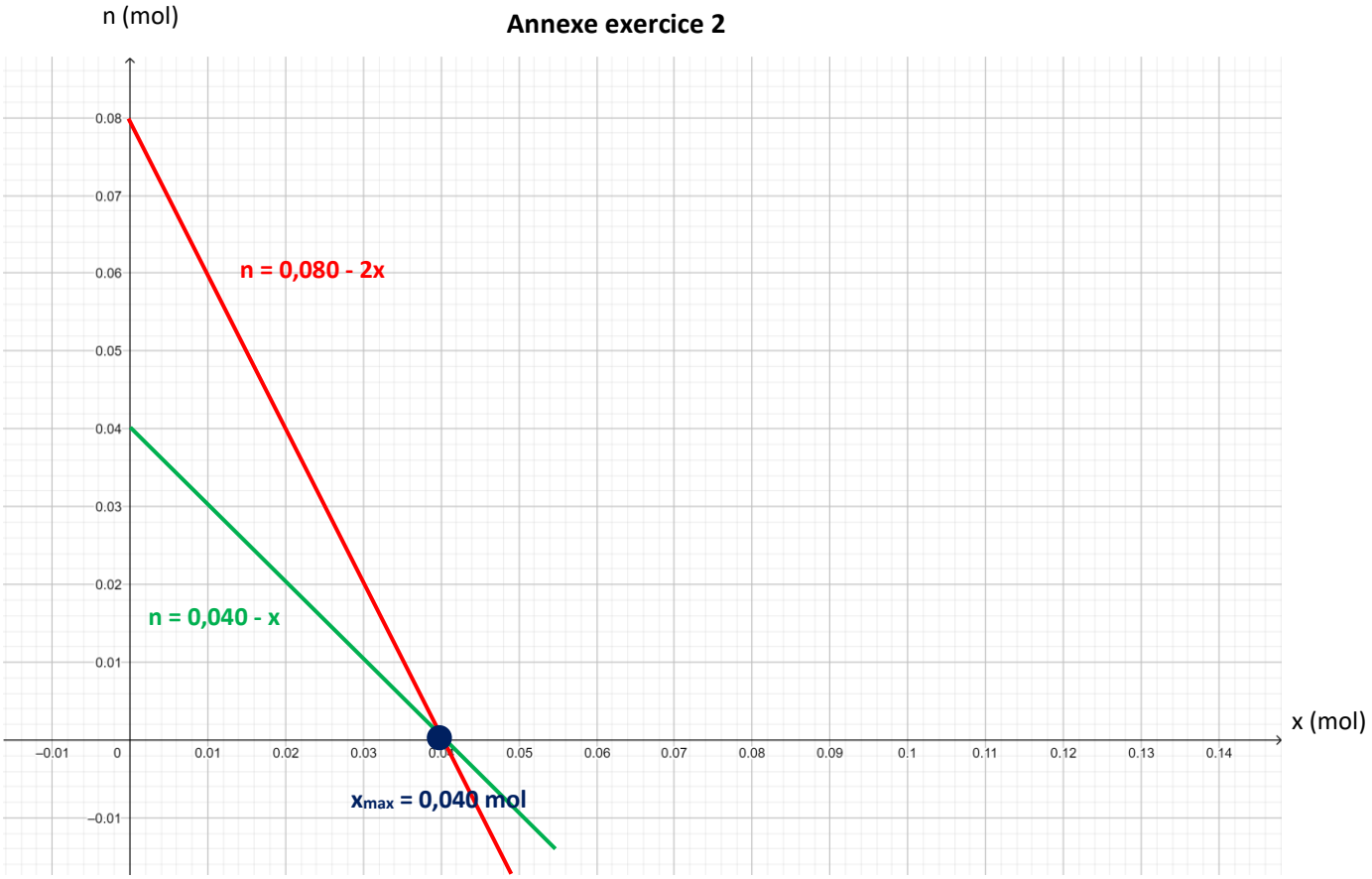
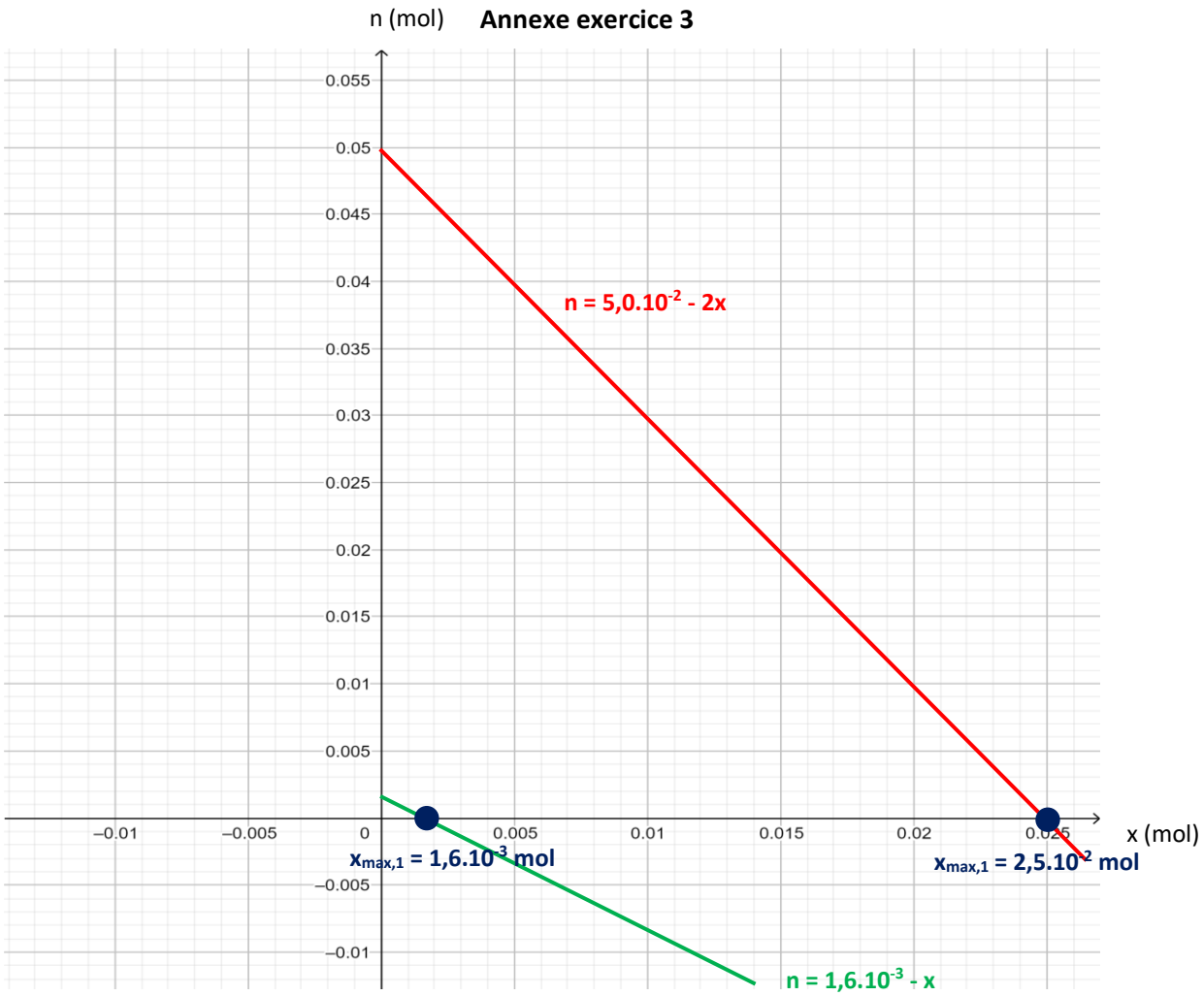
3. Que représentent ces deux courbes ?

   Ces deux courbes représentent la quantité de matière des réactifs (Mg et H_3O^+) en fonction de l'avancement de la réaction. On voit que ces deux réactifs disparaissent mais que l'ion oxonium est consommé plus rapidement que le fer car son coefficient stœchiométrique est de 2 (correspond à un coefficient directeur de -2) tandis que celui du fer est seulement de 1 (correspond à un coefficient directeur de -1).

4. Comment pouvez-vous déterminer graphiquement l'avancement maximal ?

   L'avancement maximal peut être déterminé lorsque la quantité de matière du réactif limitant (le magnésium) atteignent 0, donc lorsque la droite représentant la quantité de magnésium coupe l'axe des abscisses.

Annexe exercice 2



Annexe exercice 3